Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $4-6\sqrt{3}+3\left(2\sqrt{3}-1\right)=1$.
5p	**2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x-3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x+3$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)=g(a)$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x+1}\cdot 2^3=1$.
5p	**4.** Determinați câte numere naturale, de două cifre distincte, se pot forma cu cifre din mulțimea $A=\{3,4,5,6\}$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,0)$, $B(0,2)$, $C(3,3)$ și M, mijlocul segmentului AB. Arătați că segmentele MO și MC au lungimile egale.
5p	**6.** Se consideră $E(x)=2\sin x\sin 2x-\cos x$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}3+a&2-2a\\1-a&1+3a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.
5p	**b)** Arătați că $A(0)\cdot\left(A(a)-A(0)\right)=aI_2$, pentru orice număr real a.
5p	**c)** Demonstrați că $\det\left(A\left(a^2\right)-aA(a)\right)\geq 0$, pentru orice număr real a.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x^2-4xy+3y^2$.
5p	**a)** Arătați că $0\circ 2=12$.
5p	**b)** Determinați numerele reale x pentru care $(2x)\circ x=-1$.
5p	**c)** Determinați perechile (m,n) de numere întregi, cu $m<n$, pentru care $m\circ n=3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=5+\frac{4x-4}{x^2}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{4(2-x)}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $\left\|f(x)-f(y)\right\|\leq 1$, pentru orice x, $y\in[1,+\infty)$.
	2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+4\ln x$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)-4\ln x\right)dx=7$.
5p	**b)** Arătați că $\int_1^e x\left(f(x)-3x^2\right)dx=e^2+1$.
5p	**c)** Demonstrați că $\int_1^{\sqrt{e}} f(x)F''(x)dx=\frac{(3e-1)(3e+5)}{2}$, pentru orice primitivă $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției f.